

1.1 Logika a množiny

Obsah

Pojmy:

výrok, axióma, definícia, úsudok, hypotéza, tvrdenie, pravdivostná hodnota, logické spojky, negácia, konjunkcia, disjunkcia, implikácia, ekvivalencia, vyplýva, je ekvivalentné, kvantifikátor (existenčný, všeobecný, aspoň, najviac, práve), priamy a nepriamy dôkaz, dôkaz sporom, **matematická indukcia**, množina, prvky množiny, podmnožina, nadmnožina, prienik, zjednotenie a rozdiel množín, Vennove diagramy, disjunktné množiny, prázdna množina, doplnok množiny, konečná a nekonečná množina.

Vlastnosti a vzťahy:

- Implikácia (výrok) $A \Rightarrow B$ je ekvivalentná s implikáciou (výrokom) $B' \Rightarrow A'$ (výrok z A vyplýva B platí práve vtedy, keď platí výrok, z negácie B vyplýva negácia A),
- výroky A, B sú ekvivalentné, ak platia obe implikácie $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$,
- negácia konjunkcie (disjunkcie) je disjunkcia (konjunkcia) negácií,
- implikácia $a \Rightarrow b$ je nepravdivá práve vtedy, keď je pravdivý výrok a a nepravdivý výrok b,
- pravdivosť zložených výrokov a negácie („*tabuľka pravdivostných hodnôt*“),
- negácia výroku $\forall x \in M$ platí $V(x)$ je $\exists x \in M$, pre ktoré neplatí $V(x)$,
- negácia výroku $\exists x \in M$, pre ktoré platí $V(x)$ je $\forall x \in M$ neplatí $V(x)$,
- $A = B$ práve vtedy, keď súčasne platí $A \subset B, B \subset A$,
- pre počty prvkov zjednotenia dvoch množín platí $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$,
- **operácie zjednotenie a prienik sú asociatívne a komutatívne**,
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie

- rozlíšiť používanie logických spojok a kvantifikátorov vo vyjadrovaní sa v bežnom živote na jednej strane a v rovine zákonov, nariadení, zmlúv, návodov, matematiky na strane druhej,
- **zapisovať zložené a kvantifikované výroky, relácie a operácie s množinami pomocou dohodnutých značiek a jednotlivých výrokov, resp. množín**,
- zistiť pravdivostnú hodnotu zloženého výroku (vytvoreného pomocou negácie, konjunkcie, disjunkcie, implikácie, ekvivalencie) z pravdivostných hodnôt jednotlivých zložiek (*teda napísať pre danú situáciu príslušný riadok „tabuľky pravdivostných hodnôt“*),
- v jednoduchých prípadoch rozhodnúť, či je výrok negáciou daného výroku, vytvoriť negáciu zloženého výroku (nie len pomocou „*nie je pravda, že ...*“, *pozri príklady 1, 2*),
- v jednoduchých prípadoch zapísať a určiť množinu vymenovaním jej prvkov, charakteristickou vlastnosťou **alebo množinovými operáciami (pozri príklad 3)**,
- v jednoduchých prípadoch rozhodnúť o konečnosti či nekonečnosti danej množiny (*pozri príklad 4*),
- opísať základné druhy dôkazov (priamy, nepriamy, sporom, **matematickou indukciou**) a dokumentovať ich príkladmi,
- **použiť základné druhy dôkazov pri dokazovaní jednoduchých tvrdení o celých číslach (pozri 1.3 Teória čísel)**,
- určiť zjednotenie, prienik a rozdiel množín i doplnok množiny A (ak A je podmnožinou B) vzhľadom na množinu B (*intervalu pozri v 1.2 Čísla, premenné a výrazy*),
- použiť vzorec pre počet prvkov zjednotenia 2 množín pri hľadaní počtu prvkov týchto množín, resp. ich prieniku alebo zjednotenia (*pozri príklad 5*),
- pri riešení úloh o množinách použiť ako pomôcku Vennove diagramy (pre 2 – 4 množiny).

Príklady

1. Sú nasledujúce výroky jeden druhému negáciou?
Existujú aspoň dvaja speváci populárnej hudby, ktorých majú všetci radi.
Každého speváka populárnej hudby niekto nemá rád.
2. Utvorte negáciu výroku: *Každý mnohočlen, ktorý je súčinom dvoch mnohočlenov nepárneho stupňa, má aspoň dva reálne korene.*
3. Pomocou množín A, B, C, D opíšte množinu všetkých bodov x množiny D , pre ktoré platí: ak je číslo x v množine A , tak nie je v množine B , alebo je v množine C .
4. Zistite, či je množina všetkých dvojíc prirodzených čísel (x, y) , ktoré sú riešením rovnice
a) $5x - 3y = 100\,000$,
b) $5x + 3y = 100\,000$
konečná alebo nekonečná.
5. Koľko štvorciferných čísel je bezo zvyšku deliteľných číslom 24 alebo 19 (**číslom 24 alebo 20**)?

VÝROKY A OPERÁCIE S NIMI

1. Určte pravdivostnú hodnotu výroku: „Ak $n \geq 1$ je ľubovoľné prirodzené číslo a ak d je jeho najmenší deliteľ, tak d je nepárne číslo“.
2. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich zápisov sú výroky a potom určte ich pravdivostnú hodnotu:
a) $5.2 + 11 > 26$ b) *Košický kraj* c) $5x + 1 < 0$
d) *Obsah kruhu s polomerom r je $2\pi r$.*
e) *Pre každé reálne číslo x platí, že $0 \cdot x = 0$.*
f) *Pre každé reálne číslo x platí, že $0 \cdot x = 5$.*
3. Pred prvou hodinou matematiky v jednej triede 1. ročníka tipujú dievčatá, ako asi bude vyzerat' učiteľ matematiky, ktorého doteraz nevideli. Vierka: „*Myslím, že bude vysoký a štíhly, alebo bude mať okuliare a bude svetlovlasý*“. Elena: „*Nebude mať okuliare. Predpokladám, že nebude súčasne svetlovlasý a čiernooký*“. Anka: „*Bude čiernooký a štíhly, alebo bude vysoký a čiernooký*“. Učiteľ zodpovedal typu Vierky a Eleny, Anka však neuhádla.
Aký bol jeho vzhľad ?
4. Zistite, či výroková formula $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge B'$ je tautológia.
5. V prípade, že výrok **A** je **pravdivý** a výrok **B** je **nepravdivý** a pr. hodnota výroku **C** je neznáma, ktorému zloženému výroku:
a) $A \Rightarrow (B \vee C)$, b) $(A \Leftrightarrow B) \vee C$, c) $(A \Rightarrow (B \wedge C'))'$, d) $A \vee (B \wedge C)$, e) $(A \wedge B) \Rightarrow C$
je možné určiť pravdivostnú hodnotu ?

MNOŽINY

1. Dané sú množiny: $A = \{x \in \mathbb{Z}; x < 10\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}; 3 \nmid x \wedge |x| < 17\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z}; x^2 = 1 \vee 2|x| < 5\}$
Určte množiny $A, B, C, A \cap B, B \cup C, C_A$ vymenovaním prvkov.
2. Zapište nasledujúce množiny pomocou intervalov: $A = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}; 3x \geq 8 \wedge 5x < 29\}$,
 $C = \{x \in \mathbb{R}; |x - 2| < 3\}$, $D = \{x \in \mathbb{R}; |x - 1| \geq 4\}$

3. Overte pomocou Vennových diagramov, že pre ľubovoľné podmnožiny A, B, C danej základnej množiny U platí: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Z 50 žiakov riešilo aspoň jednu z dvoch olympiád 44 žiakov, MO neriešilo 19 žiakov a 39 žiakov riešilo práve jednu olympiádu. Koľko žiakov riešilo len MO, len FO a koľko z nich riešilo obe ?
5. Určte počty prvkov množín K, L, M , ak platí:
 $|K - L| = 6, |L - M| = 3, |M - K| = 7, |K \cap L| = 4, |L \cap M| = 3, |K \cap M| = 1, |K \cap L \cap M| = 1$
6. Dané sú intervaly $K = (-6; 4); L = (-1; 6); M = (-3; 10); N = (-1; 9)$. Množiny $K \cup L; K' \cap M; (K \cup M) \cap N; [(L - K) \cup (M - N)]$, zapíšte ako zjednotenia **čo najmenšieho počtu disjunktných** intervalov

DRUHÝ MATEMATICKÝCH DÔKAZOV

1. Dokážte: $\forall n \in \mathbb{N}: 2 \mid (n^2 + 5n)$
2. Dokážte: $\forall n \in \mathbb{N}: 7 \mid (n^2 + 5) \Rightarrow 7 \mid n$
3. Dokážte sporom: *Nijaká mocnina čísla 2 sa nerovná súčtu nijakých piatich za sebou idúcich prirodzených čísel.*
4. Dokážte matematickou indukciou, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí: a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$
b) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$
5. Dokážte: $\forall n \in \mathbb{N}: 5 \mid (n^2 - 4) \cdot (n^2 - 1) \cdot n$