

1.2 Čísla, premenné a výrazy

Obsah

Pojmy: konštanta, premenná, výraz, obor definície výrazu, rovnosť výrazov, hodnota výrazu, mnohočlen, stupeň mnohočlena, doplnenie do štvorca (*pre kvadratický mnohočlen*), člen mnohočlena, vynímanie pred zátvorku, úprava na súčin, krátenie výrazu, prirodzené (N), celé (Z), nezáporné (N_0), záporné (Z^-), racionálne (Q), iracionálne (I), reálne (R) čísla, n -ciferné číslo, zlomky (čitateľ, menovateľ, spoločný menovateľ, základný tvar zlomku, zložený zlomok, hlavná zlomková čiara), desatinný rozvoj (konečný, nekonečný a periodický), **číslo e** , číslo π , nekonečno, číselná os, znázorňovanie čísel, komutatívny, asociatívny a distributívny zákon, odmocnina (druhá), n -tá odmocnina, mocnina (s prirodzeným, celočíselným, **racionálnym** exponentom), exponent a základ mocniny, základ logaritmu, absolútna hodnota čísla, úmera (priama a nepriama), pomer, percento, promile, základ (*pre počítanie s percentami*), faktoriál, kombinačné číslo, desiatková a dvojková sústava, dekadický a dvojkový zápis, interval (uzavretý, otvorený, ohraničený, neohraničený).

Vlastnosti a vzťahy:

- $x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y)$, $x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$, kde x_1, x_2 sú korene rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$),
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, $(ab)^x = a^x b^x$, $c^0 = 1$, $a, b \geq 0$, $c > 0$, $x, y \in Z$, **resp.** $x, y \in Q$,
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$, $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$, $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$, pre $x, y \geq 0$, $m, n \in N$,
- $\sqrt{a^2} = |a|$,
- $|x - a|$ je vzdialenosť obrazov čísel x a a na číselnej osi,
- $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, $\cos\left(\frac{p}{2} - a\right) = \sin a$, $\sin\left(\frac{p}{2} - a\right) = \cos a$, $\sin(-a) = -\sin a$, $\cos(-a) = \cos a$,
 $\sin(p - a) = -\sin a$, $\cos(p - a) = -\cos a$, $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$,
 $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$,
- $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$, $a^{\log_a x} = x$ pre $a > 0, a \neq 1, x > 0$;
- $\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$, $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$ pre $a > 0, a \neq 1, x, y > 0$;
- $\log_a (x^y) = y \log_a x$ pre $a > 0, a \neq 1, x > 0$;
- $\log_r s = \frac{\log_a s}{\log_a r}$ pre $a, s, r > 0$, $r, a \neq 1$,
- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, pre prirodzené čísla n , $0! = 1$,
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ pre prirodzené čísla n a nezáporné celé čísla k nie väčšie ako n ,
- práve racionálne čísla majú desatinný periodický rozvoj,
- $R = Q \cup I$, $Q \cap I = \{\}$, $Z = N \cup Z_- \cup \{0\}$, $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

(čísla)

- zaokrúhľovať čísla,
- upraviť reálne číslo na tvar $\pm a \cdot 10^n$, kde n je celé číslo a a číslo z intervalu $\langle 1, 10 \rangle$,

- vypočítať absolútnu hodnotu reálneho čísla,
 - zapísať vzdialenosť na číselnej osi pomocou absolútnej hodnoty,
 - znázorňovať čísla na číselnú os, porovnávať čísla na číselnej osi, odčítat čísla z číselnej osi,
 - pre konkrétne n všeobecne zapísať n -ciferné číslo,
 - na približný výpočet číselných výrazov a hodnôt funkcií (vrátane $\log_a$) používať kalkulačku, pričom
 - upravovať číselné výrazy na tvar vhodný pre výpočet na kalkulačke,
 - zvoliť vhodný postup, aby mu vyšiel čo najpresnejší výsledok (*napr. pri približnom výpočte $\frac{20!}{10!10!}$*),
 - pomocou kalkulačky zistiť ostrý uhol, ktorý má danú goniometrickú hodnotu,
 - porovnať dve reálne čísla na úrovni presnosti kalkulačky,
-
- vyjadriť zjednotenie, prienik a rozdiel konečného počtu intervalov pomocou najmenšieho počtu navzájom disjunktných intervalov, jednoprvkových množín a prázdnej množiny,
- (výrazy)
- určiť hodnotu výrazu (*dosadiť*) „ručne“ alebo pomocou kalkulačky,
 - určiť obor definície výrazu (*pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy*),
 - odstrániť absolútnu hodnotu rozlišovaním vhodných prípadov (t.j. $|V(x)| = V(x)$ pre x , pre ktoré $V(x) \geq 0$ a $|V(x)| = -V(x)$ pre x , pre ktoré $V(x) \leq 0$),
 - doplniť kvadratický trojčlen do štvorca (*pozri tiež 2.2 Lineárna a kvadratická funkcia, aritmetická postupnosť*),
 - upravovať mnohočlen na súčin vynímaním pred zátvorku a použitím vzťahov pre rozklady výrazov $x^2 - y^2$, $x^2 \pm 2xy + y^2$, $ax^2 + bx + c$ (*pozri príklad 1*),
 - použiť pri úpravách výrazov (číselných alebo výrazov s premennými) rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy*, roznásobovanie, vynímanie pred zátvorku, krátenie, úpravu zloženého zlomku na jednoduchý (*pozri príklady 2, 3, 4*),
- (práca s premennou)
- používať percentá a úmeru (*pozri príklad 5*),
 - nahradiť premennú vo výraze novým výrazom (*substitúcia, pozri tiež 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy*),
 - pri priamo závislých veličinách vie vyjadriť jednu pomocou druhej (*pozri príklad 6, pozri tiež 2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti*),
 - vyjadriť neznámu zo vzorca (*pozri 2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti*),
 - zapísať slovný text algebraicky (*matematizácia*),
 - zapísať vzťahy (v jednoduchom texte) pomocou premenných, čísel, rovností a nerovností
 - zapísať, vyjadriť bežné závislosti v geometrii,
 - **v jednoduchých prípadoch odvodiť zo známych vzťahov niektoré nové vzťahy** (*pozri príklady 7, 8*),
 - riešiť kontextové (slovné) úlohy vedúce k rovniciam a nerovniciam (*pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy*) a **hľadaniu extrémov funkcií** (*pozri 2.6 Limita a derivácia, geometrický rad*) a interpretovať získané riešenia v jazyku pôvodného zadania (*pozri príklad 9*).

Príklady

1. Rozložte mnohočlen $6x^3 - 13x^2 + 7x$ na súčin lineárnych činiteľov.

2. Vyjadrite

a) $2 \log_4 x - \log_{0,2} x^3 \sqrt{x}$ pomocou logaritmov so základom 2,

b) $2 \log x - \log x^3 \sqrt{x} - 1$ ako jeden logaritmus,

c) $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ len pomocou $\cos x$.

3. Pre ktoré čísla a, b sa výraz $\frac{x+17}{x^2-x-12}$ rovná výrazu $\frac{a}{x-4} + \frac{b}{x+3}$?

4. Pre ktoré čísla a sa dá zlomok $\frac{x^2+a}{x^2+x-2}$ krátiť?

5. Zapište pomocou premenných, čísel a rovností

a) Peter má o x % viac ako Jano. ($P=(1+x/100)J$)

b) Adam a Boris si rozdelili peniaze v pomere 2 : 3. ($A = 2x, B = 3x$)

6. Kváder so štvorcovou podstavou má povrch 100 cm^2 . Vyjadrite jeho objem pomocou jeho výšky.

7. Nech S je stred vpísanej gule štvorstena $ABCD$.

a) Vyjadrite objem štvorstena $ABCS$ pomocou plochy trojuholníka ABC a polomeru vpísanej gule štvorstena $ABCD$.

b) Vyjadrite polomer vpísanej gule štvorstena $ABCD$ pomocou jeho povrchu a objemu.

8. Zapište pomocou premenných, čísel, rovností a nerovností:

a) Polovica A má dĺžku najviac 4. ($0 < A \leq 8$)

b) Obdĺžnik so stranami a, b má polomer opísanej kružnice 4. ($a^2 + b^2 = 64$)

9. Jano riešil úlohu „Súčet $A+B$ je o 80 % väčší ako rozdiel $A-B$. O koľko % je číslo A väčšie ako číslo B ?“. Janovi vyšiel správny vzťah $A = 3,5B$. Určte vzťah medzi A, B pomocou percent!

ALGEBRICKÉ VÝRAZY

1. Upravte výraz a určte podmienky: a) $\left(\frac{x^2+y^2}{x} + y\right) : \left[\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right]$

b) $6a + \left(\frac{a}{a-2} - \frac{a}{a+2}\right) : \frac{4a}{a^4 - 2a^3 + 8a - 16}$

2. Zjednodušte: a) $\left(\frac{\sqrt{12}-\sqrt{6}}{\sqrt{12}+\sqrt{6}}\right)^2$ b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} + \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2$

c) $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + 4\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$

3. Zjednodušte a určte podmienky: a) $\frac{\left(\sqrt[5]{a^{\frac{5}{4}}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt[3]{a^4}\right)^5} \cdot \frac{\left(\sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a^3 b}}\right)^5}{\left(\sqrt[5]{a \cdot \sqrt{b}}\right)^3}$

$$b) \left[\frac{\left(a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{-2} \right)^{-1}}{c^{-1} \cdot d^{\frac{3}{2}}} \right]^{-2} \cdot \left[\frac{a^{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[3]{b^4} \cdot \sqrt{d^{-3}}}{\left(c^{\frac{2}{3}} \right)^6} \right]^{-3}$$

4. Upravte na výrazy bez absolútnych hodnôt: a) $2|x-2| + |4-2x| - 4x$

$$b) x|x| - 2|x^2| + |x|^2$$

5. Zjednodušte: $\frac{(n+4)!}{(n+2)! \cdot (n^2-9)}$

KOMPLEXNÉ ČÍSLA

- Komplexné číslo $z = 2 + \frac{1-i}{1+i} - \frac{1+i}{1-i}$ vyjadrite v *goniometrickom* tvare a pomocou Moivreovej vety vypočítajte z^6 .
- Vypočítajte: $\left| 1 + 2i - \frac{2-5i}{3-i} \right|$.
- Zobrazte *graficky* množinu riešení nerovnice $|z-i| < 6$ riešenej v C .
- Vypočítajte: $(1-i)^{-3}$.
- Určte 5. člen rozvoja výrazu $(3 - \sqrt{2}i)^7$

ČÍSELNÉ OBORY

- Určte súčet všetkých koreňov rovnice $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ riešenej v R a C .
- Rozkladom na súčin riešte v C rovnicu $x^4 + 9x^2 - x^3 - 9x = 6x^2 + 54$.
- Vhodnou metódou určte najväčšie spoločné delitele a najmenšie spoločné násobky čísel 84, 210, 242.
- Dané sú iracionálne čísla $a = \sqrt{1-0,5\sqrt{1-0,25^2}} + \sqrt{1+0,5\sqrt{1-0,25^2}}$, $b = \frac{\sqrt{15}}{2}$. Určte $\frac{1}{a}$ a ukážte, že $a = b$.
- Upravte: $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{10}+\sqrt{15}}$.
- Daná je úsečka $|AB| = x$ j. Zostrojte konštrukčne úsečku KL o veľkosti $(2,6x - \sqrt{3}x)$ j.
- Zapíšte číslo $6,2\overline{53}$ v tvare zlomku aplikáciou: a) rovnice, b) nekonečného GR