

1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy

Obsah

Pojmy: rovnica, nerovnica, sústava rovníc, sústava nerovnic a ich riešenie, koeficient, koreň, koreňový činiteľ, diskriminant, doplnenie do štvorca, úprava na súčin, substitúcia, kontrola (skúška) riešenia, (ekvivalentné a neekvivalentné) úpravy rovnice a nerovnice, **lineárny, kvadratický člen, koeficient pri lineárnom (kvadratickom) člene.**

Vlastnosti a vzťahy:

- diskriminant kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ $D = b^2 - 4ac$,
- riešením kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ sú $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,
- vzťah medzi diskriminantom a počtom (navzájom rôznych) koreňov kvadratickej rovnice,
- $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, kde x_1, x_2 sú korene rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$),
- **ak x_1, x_2 sú korene kvadratickej rovnice $x^2 + bx + c = 0$, tak $x_1 \cdot x_2 = c, x_1 + x_2 = -b$,**
- vzťah medzi znamienkom súčinu dvoch výrazov a znamienkom jednotlivých činiteľov.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie
(rovnice)

- nájsť všetky riešenia lineárnej rovnice $ax + b = 0$ a kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, pr nmičom pozná vzťah medzi koreňmi kvadratickej rovnice, **jej koeficientmi** a koreňovými činiteľmi, počtom riešení (*pozri príklady 1, 2, 3*),
- nájsť všetky riešenia, resp. všetky riešenia ležiace v danom intervale I (ak sa nedá presne, tak približne s pomocou kalkulačky), rovnice $f(x) = A$, kde $A \in \mathbb{R}$ a f je funkcia
 - $x^a, b^x, \log_b x$ ($a \in \mathbb{Q}$, b je kladné číslo rôzne od 1),
 - $|x - a|$,
 - $\sin x, \cos x, \tan x$,a vie určiť, koľko riešení má uvedená rovnica (v závislosti od čísla A , čísel a, b, c , resp. intervalu I , *pozri príklady 4, 5*),
- použitím danej substitúcie $y = j(x)$ upraviť rovnicu zapísanú v tvare $f(j(x)) = A$ na tvar $f(y) = A$, špeciálne vie nájsť všetky riešenia (resp. všetky riešenia ležiace v danom intervale) rovníc
 - $f(ax + b) = A$, kde f je funkcia $x^a, b^x, \log_b x, \sin x, \cos x$,
 - $f(ax^2 + bx + c) = A$, kde f je funkcia $x^a, b^x, \log_b x, |x|$,
 - **$af^2(x) + bf(x) + c = 0$, kde f lineárna, kvadratická funkcia alebo funkcia $\sin x, \cos x$** (*pozri príklad 6*),
- nájsť všetky riešenia (resp. všetky riešenia ležiace v danom intervale) rovníc zapísaných v tvare $f(x)g(x) = 0$, kde pokiaľ vie riešiť rovnice $f(x) = 0, g(x) = 0$ (*pozri príklad 7*),
- nájsť všetky riešenia (resp. všetky riešenia ležiace v danom intervale) rovníc, ktorých riešenie možno upraviť na niektorý z predchádzajúcich tvarov
 - použitím úprav jednotlivých strán rovnice, využívajúcich úpravy výrazov a základné vlastnosti funkcií (*pozri 1.2 Číslo, premenné a výrazy, 2 Funkcie*),
 - pripočítaním (špeciálne odpočítaním) a vynásobením (špeciálne vydelením) obidvoch strán rovnice výrazom, umocnením (špeciálne odmocnením) obidvoch strán rovnice,

- odstránením absolútnej hodnoty v prípade rovníc s jednou absolútnou hodnotou (*rozlišovaním dvoch vhodných prípadov*), **resp. jednoduchých rovníc s dvoma absolútnymi hodnotami** (*rozlišovaním 3 – 4 vhodných prípadov*),
pričom vie rozhodnúť
- či použitá úprava zachová alebo či môže zmeniť množinu riešení danej rovnice,
 - ktoré z koreňov rovnice, ktorá vznikla uvedenými úpravami, sú aj koreňmi pôvodnej rovnice, resp. - pri použití postupov, ktoré mohli množinu potenciálnych koreňov zmenšiť - o ktorých číslach ešte treba zistiť, či sú koreňmi pôvodnej rovnice (*pozri príklady 8 – 12*),
- **na základe vlastností funkcie f (monotónnosť, periodičnosť, súmernosti grafu) - určiť vzťah medzi číslami x a y , pre ktoré platí $f(x) = f(y)$, kde f je funkcia x^a , b^x , $\log_b x$, $|x - a|$, $\sin x$, $\cos x$** (*na základe toho vie riešenie rovnice v tvare $f(g(x)) = f(h(x))$ nahradiť riešením rovnice (alebo rovníc) zapísaných už len pomocou funkcií g a h , pozri príklad 13*),
- riešiť kontextové (slovné) úlohy vedúce k rovniciam a interpretovať získané riešenia v jazyku pôvodného zadania,

(sústavy rovníc)

- opísať a geometricky interpretovať množinu všetkých riešení jednej a dvoch lineárnych rovníc s 2 **alebo 3** neznámymi (*pozri 3.2 Analytická geometria v rovine, 4.2 Súradnicová sústava v priestore, vektory, analytická metóda*),
- nájsť množinu všetkých riešení sústavy 1 – 3 lineárnych rovníc s 1 – 2, **resp. 1 – 3** neznámymi, a to aj v prípadoch, keď táto sústava má nekonečne veľa riešení (**a tieto riešenia aj zapísať**) alebo nemá riešenia (*pozri príklady 14, 15, 16*),
- nájsť všetky riešenia sústavy 2 rovníc s 2 neznámymi, ktorú možno jednoducho upraviť na tvar $y = f(x) \wedge g(x, y) = 0$ (resp. $x = f(y) \wedge g(x, y) = 0$), pokiaľ vie riešiť rovnicu $g(x, f(x)) = 0$ (resp. $g(f(y), y) = 0$),
- upravovať sústavy rovníc použitím
 - úprav jednotlivých strán rovnice, využívajúcich úpravy výrazov a základné vlastnosti elementárnych funkcií (*pozri 1.2 Čísla, premenné a výrazy, 2 Funkcie*),
 - pripočítania (špeciálne odpočítania) a vynásobenia (špeciálne vydelenia) obidvoch strán rovnice výrazom,
pričom vie rozhodnúť,
- či použitá úprava zachová alebo či môže zmeniť množinu riešení danej sústavy,
 - ktoré z riešení sústavy, ktorá vznikla uvedenými úpravami, sú aj riešeniami pôvodnej sústavy, resp. - pri použití postupov, ktoré mohli množinu potenciálnych riešení zmenšiť - o ktorých číslach ešte treba zistiť, či sú riešeniami pôvodnej sústavy,
- **nahradiť riešenie sústav typu $f(x, y).h(x, y) = 0 \cup g(x, y) = 0$ riešením dvojice sústav $f(x, y) = 0 \cup g(x, y) = 0$, $h(x, y) = 0 \cup g(x, y) = 0$,**
- **správne použiť nahradenie jednej rovnice sústavy súčtom vhodných násobkov jednotlivých rovníc tejto sústavy, a to aj v prípade nelineárnych sústav** (*pozri príklad 17*),
(nerovnice a ich sústavy)
- nájsť množinu všetkých riešení nerovnice
 - $f(x) * L$, kde L je reálne číslo, $*$ je jeden zo znakov nerovnosti $<, \leq, >, \geq$ a f je niektorá z funkcií $(ax + b)^a$, b^x , $\log_b x$, $|x - a|$, resp. množinu všetkých riešení tejto nerovnice ležiacich v danom intervale,

- $f(x) * L$, kde f je niektorá z funkcií $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a x je prvkom daného ohraničeného intervalu,
 - $\frac{f(x)}{g(x)} * 0$ a $f(x)g(x) * 0$, pokiaľ vie riešiť nerovnice $f(x) * 0$, $g(x) * 0$, kde $*$ je znak nerovnosti
- (pozri príklady 18, 19, 20, 21),
- pri riešení a úpravách nerovníc správne použiť
 - vynásobenie obidvoch strán nerovnice kladným alebo záporným číslom,
 - pripočítanie výrazu k obidvom stranám nerovnice,
 - **vynásobenie nerovnice výrazom** $NS(0) \neq 0$, $ax^2 + bx + c$, x^a ,
 - nájsť všetky riešenia nerovníc, ktorých riešenie možno uvedenými postupmi nahradiť riešením nerovníc uvedených v predchádzajúcej odrážke,
 - **na základe poznatkov o monotónnosti exponenciálnych a logaritmických funkcií nahradiť riešenie nerovnice $f(g(x)) * f(h(x))$, kde $*$ je znak nerovnosti a f je logaritmická alebo exponenciálna funkcia, riešením nerovnice $g(x) * h(x)$,**
 - riešiť sústavu nerovníc s jednou neznámou v prípadoch, keď vie vyriešiť samostatne každú z daných nerovníc (pozri príklad 22, pozri tiež prieniky a zjednotenia intervalov v 1.2 Čísla, premenné a výrazy),
 - **vyznačiť na x -ovej osi riešenie nerovnice $f(x) * g(x)$, pokiaľ vie načrtnúť grafy funkcií $y = f(x)$, $y = g(x)$,**
 - v rovine opísať a geometricky interpretovať množinu všetkých riešení jednej nerovnice s dvoma neznámymi x, y , ktorú možno zapísať v tvare
 - $y * f(x)$ alebo $x * f(y)$ (kde $*$ je znak nerovnosti) v tých prípadoch, kedy vie načrtnúť graf funkcie $y = f(x)$, resp. $x = f(y)$,
 - $ax + by + c * 0$,
 - $ax^2 + bx + ay^2 + dy + m * 0$,
 - $f(x, y) * 0$, ak vie načrtnúť krivku $f(x, y) = 0$

(pozri príklad 23, pozri tiež 3.3 Množiny bodov daných vlastností a ich analytické vyjadrenie),
 - riešiť kontextové (slovné) úlohy vedúce k nerovniciam a interpretovať získané riešenia v jazyku pôvodného zadania.

Príklady

1. Pre ktoré číslo p má kvadratická rovnica $y^2 + 4y + p = 0$ s neznámou y jediné riešenie?
2. Pre ktoré číslo p má rovnica $px^2 + 4x + 3 = 0$ jediné riešenie?
3. Nech s, t sú oba korene rovnice $x^2 - 4x + 1 = 0$. Vypočítajte racionálne číslo $\frac{1}{t} + \frac{1}{s}$.
4. Koľko koreňov má rovnica $\cos x = 0,5$ v intervale $(1, 26)$?
5. V intervale $(5\pi, 6\pi)$ nájdite všetky riešenie rovnice $\sin x = \sin \frac{71\pi}{5}$.
6. Použitím substitúcie $t = 2^x$ riešte rovnicu $4^x = 2^{x-1} + 14$.

7. Riešte rovnicu $(x+2)^3 - x - 2 = 0$. Návod: upravte ľavú stranu na súčin.
8. Riešte rovnicu $\cos 2x + \cos^2 x = 0,5$.
9. Riešte rovnicu $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$.
10. Riešte rovnicu $4\sqrt{x+3} + x = 2$.
11. Riešte rovnicu $\sqrt{x+2} + 5 = 2x$.
12. Adam riešil rovnicu
 a) $16\cos^4 x = 1$,
 b) $16 \cdot 9^x = 1$
 tak, že ju odmocnil na tvar
 a) $4\cos^2 x = 1$,
 b) $4 \cdot 3^x = 1$
 a novú rovnicu správne doriešil. Dostal tak správne riešenie pôvodných rovníc? Svoju odpoveď zdôvodnite.
13. Riešte rovnicu $\sin 3x = \sin 5x$.
14. Pre ktoré čísla a nemá sústava $3x + 2y = 5$, $ax - 5y = 1$ riešenie?
15. Pre ktoré čísla a, b má sústava $3x + 2y = b$, $ax - 5y = 1$ nekonečne veľa riešení?
16. Sústava dvoch lineárnych rovníc o troch neznámych má medzi riešeniami trojice $x = 0, y = 4, z = -3$ a $x = 1, y = -2, z = 0$. Napíšte aspoň jedno ďalšie riešenie tejto sústavy.
17. Zistite, či rovnicu $5x - 4y + 11z + 32 = 0$ môžeme dostať súčtom vhodných násobkov jednotlivých rovníc sústavy $3x + 5y - 7z + 4 = 0$, $9x - 22y = 47z + 88 = 0$.
18. Riešte nerovnicu $0 \leq \frac{x^2 - 1}{x + 2}$.
19. Riešte nerovnicu $x \cdot \log(4x - 3) > 0$.
20. Pre ktoré čísla x leží graf funkcie $y = 2x^2 + 2 \cdot 4^x$ nad grafom funkcie $y = 2^{2x+1} - 5x + 7$?
21. Určte najmenšie n , od ktorého je postupnosť $a_n = \frac{3n - 20}{n^2 + 1}$ rastúca.
22. Pre ktoré čísla a, b sú riešením sústavy nerovnic $4x - 7 > a + b$, $b - 5x > 8$ práve všetky čísla x intervalu $(-3, 8)$?
23. Riešte nerovnicu $x^3 \leq 5x + 6 - 2x^2$, ak viete, že korene rovnice $x^3 = 5x + 6 - 2x^2$ sú $x = 2$, $x = -3$, $x = -1$.

RIEŠENIE LINEÁRNYCH A KVADRATICKÝCH ROVNÍC V R

1. Riešte v R: a) $\frac{x-3}{x+6} + \frac{x-10}{x+5} + \frac{15}{x^2+11x+30} = \frac{9-x}{6+x}$
b) $x + \frac{2x-7}{2} - \frac{3x-1}{5} = 5 - \frac{x-6}{2}$
c) $\frac{\frac{x}{2} - \frac{2x-1}{3}}{\frac{x}{3} + \frac{3x-1}{2}} = \frac{2}{3}$
d) $\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2 + 5 = 36\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2$
2. Riešte v R: a) $1 + \sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}} = x$
b) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = \sqrt{4x+5}$
c) $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{3}{2}$
d) $\sqrt{x-8} + \sqrt{5-x} = 4$
e) $\sqrt{A(x)} + \sqrt{B(x)} = k \wedge k \in \mathbb{Z}^-$
3. Riešte v R: a) $|5-x| - |x-3| = 2|x+1|$
b) $|x^2+3x| - 4 = 0$
c) $|5x+3| + |4-3x| = 9$
4. Riešte v R: a) Určte x_2 a q , ak pre rovnicu $x^2 + 5x + q = 0$ platí $x_1 = 2$.
b) Riešte využitím vhodnej substitúcie: $(x^2 - 5x + 2)^2 + 6(x^2 - 5x + 1) + 14 = 0$
c) Zostavte kvadratickú rovnicu, ktorej korene sú prevrátené čísla ku koreňom rovnice $2x^2 + x - 1 = 0$.

EXPONENCIÁLNA ROVNICA

1. Riešte v R: a) $\frac{(0,2)^{x+0,5}}{\sqrt{5}} = \frac{(0,04)^x}{25}$
b) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$
c) $0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$
d) $8 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 1 = 0$
2. Riešte v R: a) $3 \cdot 9^{2x} - 9^{x+2} - 9^{x-1} + 3 = 0$
b) $\sqrt{5^{3x}+19} - \sqrt{5^{3x}-4} = 1$
c) $9^{x+\sqrt{x^2-1}} + 2 \cdot 3^{x+\sqrt{x^2-1}+2} = 63$

LOGARITMICKÁ ROVNICA

1. Riešte v R: a) $\log(x-2) + \log(3+x) = \log 6$ b) $2.\log 3x^2 + 3.\log 4x^3 = 4.\log 2x^2 + 4.\log 6x$
- c) $2 + \log 5x = \log(6x+7) + \log 25$ d) $3.\log x + \log x^4 - \log \sqrt[3]{x} = 5$
2. Riešte v R: a) $x^{(3+4.\log x)} = 10.x^6$ b) $\log_4(2.4^{x-2} - 1) + 4 = 2x$
- c) $x^{2.\log x - 1} = 100.x^3$ d) $3 + \log x^2 = \frac{5}{\log x}$

RIEŠENIE NEROVNÍC

1. Koľko celých čísel vyhovuje nerovnici $|x+2| + |x-2| \leq 6$.
2. Riešte v R nerovnicu $\frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 10x + 21} < 0$.
3. Určte definičný obor funkcie $f: y = 2\sqrt{(6-x)^2} - \sqrt{x^2 - 8x + 16}$ a zistite, pre aké $x \in \mathbb{R}$ nadobúda funkcia nezáporné hodnoty.
4. Určte všetky celé čísla x , pre ktoré platí:
- a) $\frac{2x-11}{4} + \frac{19-2x}{2} < 2x$
- b) $\frac{2x+15}{9} > \frac{1}{5}(x-1) + \frac{x}{3}$
5. Riešte v R: a) $\left(\frac{9}{16}\right)^{x+3} \cdot \left(\frac{64}{27}\right)^{4x-1} \geq \frac{4}{3}$ b) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{3-x}{|x|}} \geq 1$
6. Riešte v R: a) $\log_3 \log_{0,5} x < 1$ b) $\log_{0,6}(x+3) + \log_{0,6}(x-3) \geq -2$
7. Rozhodnite o pravdivosti výroku: a) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-0,9} < 1$ b) $\left(\frac{5}{3}\right)^4 > \left(\frac{3}{5}\right)^2$

SÚSTAVY ROVNÍC

1. Riešte v $\mathbb{R}^2$ sústavu:

$$\frac{12}{\sqrt{x-1}} + \frac{5}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}} = 5 \wedge \frac{8}{\sqrt{x-1}} + \frac{10}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}} = 6$$

2. Určte rovnicu, ktorou je určená kvadratická funkcia f s definičným oborom $\mathbb{R}$, ktorej graf prechádza bodom $A[1; 2]$, $B[-2; 5]$, $C[3; 20]$.
3. Určte graficky množinu všetkých bodov pre súradnice ktorých platí:
 $x+2y = 8 \wedge 2x - y \leq 8$
4. Určte vzájomnú polohu priamky p a roviny r ak:
 $p: x = -1+2t, y = 3+4t, z = 3t; t \in \mathbb{R}$
 $r: 3x - 6y + 2z - 5 = 0$
5. Určte všetky $[x; y] \in \mathbb{R}^2$ pre ktoré platí:
 $x+y^2 = 7 \vee xy^2 = 12$
6. Rozdiel dvoch prirodzených čísel je 128, rozdiel ich aritmetického a geometrického priemeru je 16. Určte tieto čísla.

SÚSTAVY NEROVNÍC

1. Riešte a) v $\mathbb{R}$ b) v $\mathbb{N}$ sústavu: $\frac{2}{3}(x-2) \geq \frac{x-4}{2} \wedge \frac{x-3}{5} < 1 - \frac{x-2}{5}$
2. V karteziánskej sústave súradníc zostrojte všetky body $[x; y]$, pre ktorých súradnice vyhovuje:
a) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 \leq 0 \wedge x + y - 2 < 0$
b) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 \geq 0 \wedge x + y - 2 = 0$
3. V $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ riešte sústavu numericky i graficky: $x + 3y = 8 \wedge 2x - 5y \leq 5$
2. Určte súradnice vrcholov mnohoúhelníka, ktorý je grafickým obrazom riešenia sústavy:
a) $x - y \leq 2 \wedge x \geq 0 \wedge x + 2y \leq 8$
b) $x - y + 3 \geq 0 \wedge x \geq 0 \wedge x - 4y \leq 0 \wedge x + y - 5 \leq 0 \wedge x \leq 4$
c) $x + y - 1 \leq 0 \wedge 3x - y + 5 \geq 0 \wedge 3x - 5y - 15 \leq 0$

RIEŠENIE ALGEBRICKÝCH ÚLOH S PARAMETROM

1. Určte $a \in R$, pre ktoré má rovnica $(x+2)(a-1) = 3ax$ kladné korene.
2. Riešte danú sústavu a určte podmienky, za ktorých má sústava kladné korene:
 $x + 2ay = 3 \wedge 3x - 2y = 1 \wedge a \in R, a - \text{parameter}.$
3. a) Určte $k \in R$ tak, aby rovnica $(k-12)x^2 + 2(k-12)x + 2 = 0$ nemala reálne korene.
b) Daná je elipsa $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ a priamka $p: y = x + m$, kde $m \in R$ je parameter. Určte m tak, aby elipsa mala s priamkou p spoločné práve dva body.
a) Určte $a \in R$ tak, aby pre korene x_1, x_2 rovnice $ax^2 - 42x + 8 = 0$ platil vzťah $x_1 = 2x_2$.
4. Riešte v R graficky rovnicu: a) $|x| + 2 = x + b$, ak $b - \text{parameter} \wedge b \in R$
b) $cx + 1 = |x|$, ak $c - \text{parameter} \wedge c \in R$
5. Riešte v R s parametrom $p \in R$: $6(4p - x) - p \cdot x \geq 2$
6. Pre aký reálny parameter p rovnica $p \cdot x^2 - (p+3)x + 2p + 5 = 0$ má len jeden reálny koreň?

ABSOLÚTNA HODNOTA

1. a) Riešte v N : $|5x+3| + |4-3x| = 9$
b) Riešte v R : $|5-x| - 2|x+1| = |x-3|$
2. Riešte v R : $3|x-1| + |3x-1| \leq x-1$
3. Riešte v R : $2\sqrt{x+2} + \sqrt{2-4x} = \sqrt{10}$
3. Riešte výpočtom aj graficky rovnicu $2|x| = x + 3$.
4. Riešte čo najúspornejšie: a) $\sqrt{(x-3)^2} = -x + 3$ b) $\sqrt{(x^2 + 5x + 6)^2} = x^2 + 5x + 6$

RIEŠENIE ROVNÍC V OBORE KOMPLEXNÝCH ČÍSEL

1. Riešte v C : $\left(5 - \frac{1}{i}\right)\bar{z} + 2z = 22i$
2. Riešte v C : $16x^4 - 81 = 0$
3. Riešte v C : $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$
4. Riešte v C : $x^2 - 2(1+i)x + 2i = 0$
5. Riešte v C : $\bar{z} = z^2$
6. Riešte v C : $|z+1-2i| \leq 3 \wedge |z+2-2i| \geq |z|$