

2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti

Obsah

Pojmy: premenná (veličina), „daná premenná je funkciou inej premennej“, funkcia, postupnosť, argument, funkčná hodnota, (n -tý) člen postupnosti, definičný obor a obor hodnôt funkcie, graf funkcie, rastúca, klesajúca, monotónna funkcia (postupnosť), maximum (minimum) funkcie (postupnosti), lokálne maximum a minimum funkcie, zhora (zdola) ohraničená funkcia (postupnosť), ohraničená funkcia (postupnosť), horné (dolné) ohraničenie; konštantná, prostá, inverzná, zložená, periodická funkcia; rekurentný vzťah, postupnosť daná rekurentne.

Vlastnosti a vzťahy:

- rastúca (klesajúca) funkcia je prostá,
- k prostej funkcii existuje inverzná funkcia,
- graf inverznej funkcie f^{-1} je súmerný s grafom funkcie f podľa priamky $y = x$,
- $f(f^{-1}(x)) = x$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie

- v jednoduchých prípadoch rozhodnúť, či niektorá z dvoch daných premenných veličín je funkciou druhej z nich, a túto závislosť vyjadriť, ak je to možné urobiť pomocou predpisov funkcií, ktoré pozná (pozri príklady 1, 2),
- z daného grafu funkcie
 - určiť približne
 - jej extrém,
 - intervaly, na ktorých rastie (klesá),
 - zistiť, či je zdola (zhora) ohraničená,
- nájsť definičný obor danej funkcie, resp. rozhodnúť, či dané číslo patrí do definičného oboru danej funkcie (pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),
- rozhodnúť, či dané číslo patrí do oboru hodnôt danej funkcie (pozri 1.4 Rovnice a nerovnice),
- nájsť funkčnú hodnotu funkcie v danom bode, určiť jej priesečníky so súradnicovými osami, nájsť priesečníky grafov dvoch funkcií (pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),
- v prípade konštantnej funkcie a funkcií $ax + b$, $ax^2 + bx + c$, $\frac{ax + b}{cx + d}$, x^a , a^x , $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$
 - určiť na danom intervale ich obor hodnôt,
 - určiť intervaly, na ktorých sú tieto funkcie rastúce, resp. klesajúce,
 - načrtnúť ich grafy,
 - nájsť ich najväčšie, resp. najmenšie hodnoty na danom intervale $\langle a, b \rangle$,
 - rozhodnúť, ktoré z nich sú na danom intervale I
 - prosté,
 - zhora (zdola) ohraničené,
- **určiť na danom intervale obor hodnôt funkcií tvaru $f(ax + b)$, kde f je niektorá z funkcií x^a , a^x , $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$,**
- načrtnúť grafy funkcií
 - $|ax + b|$, $ax + b + |cx + d|$,
 - $a + f(x)$, $f(a + x)$, $-f(x)$, $|f(x)|$, ak pozná graf funkcie f , a opísať, ako vznikne uvedený graf z grafu funkcie f ,
- načrtnúť graf inverznej funkcie f^{-1} , ak pozná graf prostej funkcie f ,
- nájsť inverzné funkcie k funkciám

- $ax+b$, $\frac{ax+b}{cx+d}$, x^a , a^x , $\log_a x$,
- $ax^2 + bx + c$ na vhodnom intervale,
- $c f(ax+b) + d$, kde f je niektorá z funkcií x^a , a^x , $\log_a x$,
- v jednoduchých prípadoch rozhodnúť o existencii riešenia rovnice $f(x) = 0$ (resp. $f(x) = a$), pokiaľ vie načrtnúť graf funkcie f ,
- graficky znázorniť na číselnej osi množinu riešení nerovnice $f(x) * a$, kde $*$ je jeden zo symbolov $<, \leq, >, \geq$, pokiaľ vie načrtnúť graf funkcie f ,
- nájsť všetky riešenia nerovnice $f(x) * a$, pokiaľ vie riešiť rovnicu $f(x) = a$ a súčasne vie načrtnúť graf funkcie f ,
- **použiť dané (alebo žiakom objavené) rekurentné vzťahy pri riešení jednoduchých úloh** (pozri 5.1 Kombinatorika a pravdepodobnosť),
- vypočítať hodnotu daného člena postupnosti danej jednoduchým rekurentným vzťahom,
- **v jednoduchých prípadoch rozhodnúť, či dve postupnosti, z ktorých jedna je daná rekurentne a druhá explicitne, sú rovnaké,**
- **v jednoduchých prípadoch rozhodnúť o raste, resp. klesaní postupnosti** (pozri príklad 3).

Príklady

1. Veličiny x, y sú vyjadrené pomocou premennej t nasledovne:

a) $x = 3t^2 + 1, y = 7 - 2t$,

b) $x = \sin^4 t, y = \cos^4 t$.

Zistite, či veličina x je funkciou veličiny y alebo veličina y je funkciou veličiny x .

2. Všímajme si všetky rovnoramenné trojuholníky so základňou 8 cm. Zistite, či v týchto trojuholníkoch je

a) výška na rameno funkciou výšky na základňu,

b) výška na základňu funkciou výšky na rameno.

3. Od ktorého člena počnúc je postupnosť $a_n = \frac{3n^2 - 7}{n^2 - 100n}$ monotónna?

FUNKCIE A ICH VLASTNOSTI

1. Zistite, či funkcia $f: y = \sqrt{25 - x^2}$ je párna. Určte jej obor hodnôt.
2. Daná je funkcia $f: y = \frac{\log(x^2 - 4)}{\log(3x + 6)}$. Určte jej definičný obor a zistite, či číslo 1 je funkčná hodnota.
3. Určte definičný obor funkcie $f: y = \frac{\sqrt{0,2^x - 0,04}}{x + 4}$.
4. Určte graf funkcie $g: y = \frac{|x| + x}{x}$ a popíšte vlastnosti funkcie.
5. Ktorá z rovníc neurčuje funkciu s premennou x : a) $2x + y^2 = 0$ b) $x^2 + 2y = 0$ a prečo?
6. Určte graf a popíšte vlastnosti funkcie: $f: y = \left| \frac{x-1}{x+2} \right|$
7. Pre aké $p \in \mathbb{R}$ sa funkcie $f: y = \frac{19 - x}{x^2 + 2x - 15}$ a $g: y = \frac{p}{x+5} + \frac{2}{x-3}$ rovnajú?
8. Určte $D(f)$ pre $f: y = \sqrt{\frac{x+4}{6-x}} - 2 \cdot \log(x^2 - 9x + 14)$

POSTUPNOSTI

1. Využitím definície limity postupnosti dokážte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2$.
2. Napíšte prvých päť členov postupnosti určenej rekurentným vzťahom $a_{n+1} = \frac{1}{n} \cdot a_n$, keď hodnotu člena a_1 udáva prirodzené číslo vyhovujúce nerovnici $\frac{3x-2}{4} - \frac{1-2x}{5} < 5 - \frac{x+1}{2}$
3. Určte danú postupnosť rekurentným vzťahom a prvým členom:
a) $\left\{ \frac{(-1)^n}{n(n+1)} \right\}_{n=1}^{\infty}$ b) $\left\{ \frac{1}{n(n+1)} \right\}_{n=1}^{\infty}$ c) $\{\log 10^n\}_{n=1}^{\infty}$
4. Určte monotónnosť postupnosti: a) $\{n^2 - 10n + 1\}_{n=1}^{\infty}$ b) $\left\{ \frac{n+2}{n+3} \right\}_{n=1}^{\infty}$ c) $\{\sin np\}_{n=1}^{\infty}$
5. Zistite, či postupnosť $\left\{ \frac{5n-3}{2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická alebo geometrická.