

2.5 Goniometrické funkcie

Obsah

Pojmy: π , goniometrická funkcia, sínus, kosínus, tangens, (najmenšia) perióda.

Vlastnosti a vzťahy:

- hodnoty goniometrických funkcií pre uhly $0, \frac{p}{6}, \frac{p}{4}, \frac{p}{3}, \frac{p}{2}$,
- vzorce pre sínus a kosínus dvojnásobného uhla,
- $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$, $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, $\cos\left(\frac{p}{2} - a\right) = \sin a$, $\sin\left(\frac{p}{2} - a\right) = \cos a$, $\sin(p + a) = -\sin a$,
 $\cos(p + a) = -\cos a$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$, $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$, $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$,
 $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$,
- graf funkcie kosínus vznikne posunutím grafu funkcie sínus,
- periodickosť a najmenšie periódy jednotlivých goniometrických funkcií,
- **osi a stredy súmerností grafov goniometrických funkcií.**

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie (pozri tiež 2.1 Funkcia a jej vlastnosti)

- použiť rovnosti uvedené v časti Vlastnosti a vzťahy pri úprave goniometrických výrazov (*pozri 1.2 Čísla, premenné, výrazy*),
 - nájsť pomocou kalkulačky riešenie rovnice $f(x) = a$, kde f je goniometrická funkcia, a to aj v prípade, že na kalkulačke niektoré goniometrické alebo inverzné goniometrické funkcie nie sú (*pozri tiež 1.2 Čísla, premenné, výrazy*),
 - riešiť goniometrické rovnice a nerovnice (*pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy*),
 - vyjadriť hodnoty goniometrických funkcií pre uhly $a \in \left(0, \frac{p}{2}\right)$ ako pomery strán pravouhlého trojuholníka,
 - použiť goniometrické funkcie pri výpočte prvkov pravouhlého trojuholníka (*pozri tiež 3.1 Základné rovinné útvary*),
 - vyjadriť (*na základe znalosti súmerností a periodičnosti grafov goniometrických funkcií*) $\sin a, \cos a$, $\operatorname{tg} a$ pre $a \in R$ ako sínus, kosínus alebo tangens vhodného uhla $b \in \left(0, \frac{p}{2}\right)$,
 - nájsť hodnoty všetkých goniometrických funkcií pre daný argument, ak pre tento argument pozná hodnotu aspoň jednej z nich,
 - načrtnúť grafy funkcií $\sin$, $\cos$, tg , určiť hodnoty v bodoch $0, \frac{p}{6}, \frac{p}{4}, \frac{p}{3}, \frac{p}{2}$, určiť najmenšie periódy týchto grafov **a ich osi a stredy súmernosti**,
 - určiť podintervaly daného ohraničeného intervalu, na ktorých sú funkcie $\sin$, $\cos$, tg rastúce, resp. klesajúce,
 - rozhodnúť o ohraničenosti funkcie $\operatorname{tg} x$ na danom intervale,
- načrtnúť grafy funkcií $k(f(x))$, $f(kx)$, $f(ax + b)$, kde $k, a, b \in R$ a f je niektorá z goniometrických funkcií, určiť priesečníky týchto funkcií s x -ovou osou a ich periódu a v prípade $f(x) = \sin x$ alebo $f(x) = \cos x$ aj najmenšie a najväčšie**

GONIOMETRIA

- a) Určte bez pomôcok: $\operatorname{tg} 855^\circ$, $\sin(-210^\circ)$
b) Určte hodnoty goniometrických funkcií $\sin x$, $\cos x$ a $\cot g x$, ak $\operatorname{tg} x = -\frac{5}{12} \wedge x \in \left(\frac{p}{2}; p\right)$
c) Určte hodnoty GF pre $\sin 2x$, $\cos 2x$, ak $\sin x = -\frac{2}{3} \wedge x \in \left(\frac{3}{2}p; p\right)$.
- a) Bez použitia tabuliek vypočítajte hodnotu výrazu: $\frac{2 \cot g 105^\circ}{\cot g^2 105^\circ - 1}$
b) Upravte na logaritmovanie výraz: $\cos^2 x - \cos^2 y$
- Zjednodušte výraz $1 + \frac{\cos^4 a - 1}{\sin^2 a} - \cot g^2 a \cdot \sin^2 a$ a správnosť overte pre $a = \frac{p}{6}$.
- Dokážte, že pre prípustné hodnoty x platí: a) $\frac{2 \sin x - \sin 2x}{2 \sin x + \sin 2x} = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$
b) $\frac{\cos 2y + \cos 4y}{\cos 2y - \cos 4y} = \cot g 3y \cdot \cot g y$

GONIOMETRICKÉ FUNKCIE

- Rozhodnite, či hodnota funkcie $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\cot g x$ je v danom bode x číslo kladné, záporné alebo nula: a) $x = \frac{12}{7}p$ b) $x = -\frac{4}{5}p$
- Určte základné veľkosti orientovaných uhlov: a) 1800° b) -333° c) $19p$ d) $-\frac{83}{5}p$
- Načrtnite graf funkcie: a) $f: y = -\sin\left(x - \frac{p}{3}\right)$ b) $g: y = 2 \cdot \cos x - 1$
- Načrtnite graf funkcie $f: y = |2 \cdot \sin x - 1|$ $\wedge$ $x \in \langle -2p; 2p \rangle$

GONIOMETRIA – SÍNUSOVÁ VETA, KOSÍNUSOVÁ VETA

- Vypočítajte najväčší uhol v trojuholníku so stranami $a = 8 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$, $c = 13 \text{ cm}$. Vypočítajte aj obsah tohto trojuholníka.
- Sily $F_1 = 125 \text{ N}$ a $F_2 = 75 \text{ N}$ pôsobiace v tom istom bode zvierajú uhol $\alpha = 50^\circ$. Určte:
a) veľkosť výslednej sily b) uhol, ktorý zvierá výsledná sila s väčšou silou.
- Daný je $\triangle ABC$, v ktorom $a = 40 \text{ m}$, $b = 57 \text{ m}$, $c = 59 \text{ m}$. Vypočítajte jeho obsah a polomer opísanej kružnice.
- Daný je $\triangle ABC$, v ktorom $a = 100 \text{ cm}$, $b = 80 \text{ cm}$, $c = 62 \text{ cm}$. Vypočítajte polomer kružnice vpísanej tomuto trojuholníku.

RIEŠENIE GONIOMETRICKÝCH ROVNÍC A NEROVNÍC

- Riešte v R: $2 \cdot \sin^2 x + 1 = 5 \cdot \cos x$
- Riešte v R: $\frac{\sin x}{\sqrt{2} + \cos x} = 1$
- Riešte v R: $2 \cdot \cos^2 x + 5 \cdot \cos x + 2 \geq 0$
- Riešte v R: $-2 \cdot \sin\left(3a - \frac{p}{3}\right) = 1$
- Riešte v R: $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$
- Riešte v R: $\sin x + \cos x = 1/(2 \sin x)$