

2.6 Limita a derivácia, geometrický rad

Obsah

Pojmy: limita postupnosti a funkcie, nevlastná limita, spojitá funkcia, derivácia funkcie, dotyčnica ku grafu funkcie v danom bode, stacionárny bod funkcie, druhá derivácia funkcie, geometrický rad, kvocient geometrického radu, konvergentný a divergentný geometrický rad.

Vlastnosti a vzťahy:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ pre $|q| < 1$,
- $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$ pre $|q| < 1$,
- geometrický rad $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ (kde $a \neq 0$) diverguje pre $|q| \geq 1$,
- derivácia funkcie f v bode a je smernicou dotyčnice ku grafu funkcie f v bode $[a, f(a)]$,
- ak má funkcia f v každom bode intervalu I kladnú deriváciu, tak je na I rastúca,
- vzťah medzi existenciou maxima (minima) funkcie a nulovosťou jej derivácie.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie

- opísať jednoduché limitné procesy (napr. výpočet plochy pod grafom funkcie $f(x) = x^2$ na intervale $[0,1]$ na základe explicitného vyjadrenia pre súčet $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$, výpočet smernice dotyčnice ku grafu funkcie $y = f(x)$ v danom bode tohto grafu),
- vypočítať deriváciu polynomickej funkcie a mocninových funkcií a nájsť v danom bode rovnicu dotyčnice k týmto funkciám,
- na základe výpočtu derivácie nájsť intervaly, na ktorých polynomická funkcia rastie, resp. klesá a načrtnúť jej graf (pokiaľ vie riešiť nerovnice $f'(x) \neq 0$, pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy), na základe znamienok funkčných hodnôt v bodoch lokálnych extrémov zistiť počet priesečníkov tohto grafu s osou x ,
- v prípade jednoduchých slovných úloh na extrém nájsť predpis funkcie, ktorej extrém treba nájsť,
- použitím derivácií nájsť v jednoduchých prípadoch extrém funkcií na uzavretom ohraničenom intervale,
- opísať správanie sa
 - polynómov pre $x \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}^+$,
 - lineárnej lomenej funkcie $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ pre $x \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^+ - \frac{d}{c}$,
 - funkcií $y = x^{-n}$, kde $n \in \mathbb{N}$, $y = \log_a x$ pre hodnoty x blízke sa k 0,
 - funkcie $y = \tan x$ pre hodnoty x blízke sa k $\frac{\pi}{2}$,
- rozhodnúť, či je daný geometrický rad konvergentný,
- nájsť súčet konvergentného geometrického radu.

2.7 Integrálny počet

Obsah

Pojmy: neurčitý integrál, integračná premenná, integračná konštanta, plocha ohraničená grafmi funkcií, (Riemannov) určitý integrál, Newtonov-Leibnizov vzorec.

Vlastnosti a vzťahy:

- Newtonov-Leibnizov vzorec pre výpočet určitého integrálu (tj. vzťah medzi primitívnou funkciou k funkcii f a integrálom $\int_a^b f(x)dx$), špeciálne vzťah medzi veľkosťou plochy ohraničenej grafom nezápornej funkcie f a primitívnou funkciou k tejto funkcii,
- ak $F'(x) = f(x)$ aj $G'(x) = f(x)$, tak F a G sa líšia o konštantu (integračná konštanta).

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie

- na základe znalostí derivácií funkcií nájsť $\int f(x)dx$, ak f je polynóm alebo niektorá z funkcií $(ax + b)^r$ a pre tieto funkcie vie použitím Newtonovho–Leibnizovho vzorca vypočítať $\int_a^b f(x)dx$,
- v jednoduchých prípadoch pomocou integrálu vyjadriť veľkosť plochy $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [a, b] \cup f(x) \leq y \leq g(x)\}$, resp. plochy ohraničenej grafmi dvoch spojitých funkcií (ak vie nájsť priesečníky týchto dvoch funkcií, pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy),
- opísať limitné procesy používané pri výpočte veľkosti plôch (napr. vyplňanie, ohraničovanie zhora a zdola).

DERIVÁCIA FUNKCIE

1. Derivujte funkcie: $f: y = (x^2 + 1) \cdot \sin x$, $g: y = \tan x$, $h: y = \ln(2x + 1)$, $i: y = \sqrt{2x - x^2}$
2. Napíšte rovnicu dotyčnice grafu funkcie $f: y = \frac{1}{\cos^2 x}$ v bode $T\left[\frac{p}{4}; y_0\right]$
3. Učte rovnicu dotyčnice krivky $y^2 = 6x - 8$ v bode $T[x_0; 2]$
4. Pomocou definície derivácie funkcie určte deriváciu funkcie $f: y = (1 - x) \cdot (2 + x^2)$ pre $x_0 = 3$.

VYŠETROVANIE PRIEBEHU FUNKCIÍ

1. Nájdite globálne extrémny funkcie $f: y = -x^3 + 3x^2 + 5$ na intervale $\langle 0; 3 \rangle$.
2. Vyšetrite priebeh funkcie $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}$ a načrtnite jej graf.
3. Určte rozmery bazénu so štvorcovým dnom a objemom 32 m^3 tak, aby na náter stien a dna bola spotreba farby minimálna.
4. Daná je funkcia $f: y = x^4 - 2x^2$. Určte jej intervaly monotónnosti, lokálne extrémny a načrtnite jej graf.

APLIKÁCIE DIFERENCIÁLNEHO POČTU

1. Napíšte rovnicu dotyčnice krivky $y = \sqrt{x^2 - 5}$ v bode $T[3; y_0]$.
2. Silážna jama má mať tvar pravidelného rovnobežnostena s objemom 200 m^3 . Dĺžka má byť štvornásobkom šírky, 1 m^2 základne je 2-krát lacnejší ako 1 m^2 steny. Aké majú byť rozmery tejto jamy, aby jej stavba bola najlacnejšia?
3. Určte dotyčnicu krivky $x \cdot y + \ln y = 1$ v bode $T[x_0; 1]$.
4. Závislosť dráhy s na čase t je určená vzťahom $s(t) = At^2 + Bt$. Vypočítajte veľkosť okamžitej rýchlosti hmotného bodu v čase $t = 1 \text{ s}$, ak $A = 1 \text{ ms}^{-2}$, $B = 3 \text{ ms}^{-1}$.

NEURČITÝ INTEGRÁL

- Vypočítajte: a) $\int (x+2)^2 \cdot (3x^2 - 6x) dx$ pre $x \in \mathbb{R}$
b) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$ pre $x \in (0; \infty)$
- Vypočítajte: a) $\int \frac{x^2 + 7x + 12}{x + 4} dx$ pre $x \in \mathbb{R} - \{-4\}$
b) $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx$ pre $x \in (0; \infty)$
- Vypočítajte: $\int (2x^{-1,2} + 3x^{-0,8} - 5x^{0,38}) dx$ pre $x \in (0; \infty)$
- Dokážte, že funkcie $F: y = \sin^2 x$ a $G: y = -\frac{\cos 2x}{2}$ sú primitívne k tej istej funkcii f na $\mathbb{R}$. Určte funkciu f a konštantu, o ktorú sa dané primitívne funkcie líšia.

URČITÝ INTEGRÁL

- Vypočítajte veľkosť plochy ohraničenej grafmi funkcií: $f: y = x + 4$ a $g: y = x^2 + 4x$
- Vypočítajte: a) $\int_{-1}^1 (x^2 + 6x + 2) dx$ b) $\int_0^{\frac{p}{4}} \tan^2 x dx$ c) $\int_0^{\frac{p}{2}} (x - \sin x) dx$
- Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou *jedného oblúka sínusoidy* okolo osi x .
- Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinného obrazca ohraničeného krivkami $y = 6x - x^2$ a $y = 3x$ okolo osi x .