

3. 1 Základné rovinné útvary

Obsah

Pojmy:

a) Lineárne útvary.

Bod, priamka, polpriamka, úsečka, stred úsečky, deliaci pomer, polrovina, rovnobežné a rôznobežné priamky, uhol (ostrý, pravý, tupý, **konvexný, priamy a nekonvexný uhol**), susedné, vrcholové, súhlasné a striedavé uhly, os úsečky, os uhla, uhol dvoch priamok, kolmé priamky, kolmica, vzdialenosť (dvoch bodov, bodu od priamky, rovnobežných priamok).

b) Kružnica a kruh.

Stred, polomer (*ako číslo i ako úsečka*), priemer, tetiva, kružnicový oblúk, dotyčnica, sečnica a nesečnica, **stredový a obvodový uhol**, obvod kruhu a dĺžka kružnicového oblúka, kruhový výsek a odsek, medzikružie, obsah kruhu a kruhového výseku, **spoločné (vonkajšie, vnútorné) dotyčnice dvoch kružníc**.

c) Trojuholník.

Trojuholník (ostrouhlý, pravouhlý, tupouhlý, rovnoramenný a rovnostranný trojuholník), vrchol, strana (*ako vzdialenosť, ako úsečka*), výška (*ako vzdialenosť, ako úsečka i ako priamka*), uhol, ťažnica, ťažisko, stredná priečka, kružnica trojuholníku opísaná, kružnica do trojuholníka vpísaná, obvod a plošný obsah trojuholníka, trojuholníková nerovnosť, Pytagorova veta, **Euklidove vety**, sínusová a kosínusová veta.

d) Štvoruholníky a mnohoúhelníky.

Vrchol, strana (*ako vzdialenosť, ako úsečka*), uhlopriečka, uhol, konvexný štvoruholník, rovnobežník, kosoštvorec, obdĺžnik, štvorec, lichobežník, rovnoramenný lichobežník, základňa a rameno lichobežníka, výška rovnobežníka a lichobežníka, plošný obsah rovnobežníka a lichobežníka, konvexné, nekonvexné a pravidelné mnohoúhelníky, obsah mnohoúhelníka.

Vlastnosti a vzťahy:

a) Lineárne útvary

- Súhlasné uhly pri dvoch rovnobežkách sú rovnaké,
- striedavé uhly pri dvoch rovnobežkách sú rovnaké,
- súčet susedných uhlov je 180° ,
- vrcholové uhly sú rovnaké.

b) Trojuholník

- Trojuholníková nerovnosť,
- súčet uhlov trojuholníka,
- oproti väčšej (rovnejšej) strane leží väčší (rovnaký) uhol, oproti rovnakým stranám ležia rovnaké uhly,
- delenie ťažníc ťažiskom,
- priesečník osí strán je stred opísanej kružnice, priesečník osí uhlov je stred vpísanej kružnice,
- vyjadrenie obsahu trojuholníka pomocou
 - dĺžky strany a k nej príslušnej výšky,
 - dvoch strán a sínusu uhla týmito stranami zovretého,
- Pytagorova veta, goniometria pravouhlého trojuholníka (*pozri 2.5. Goniometrické funkcie*),
- vyjadrenie kosínusov uhlov trojuholníka pomocou dĺžok strán (kosínusová veta),
- $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$, kde r je polomer opísanej kružnice (sínusová veta),
- **vyjadrenie polomeru vpísanej kružnice pomocou jeho obsahu a obvodu**,
- zhodné a podobné trojuholníky, vety o zhodnosti (sss, sus, usu, Ssu) a podobnosti (sss, sus, uu) trojuholníkov, **Euklidove vety**,
- vzťah medzi pomerom podobnosti dvoch trojuholníkov a
 - dĺžkami odpovedajúcich si úsečiek,
 - veľkosťami odpovedajúcich si uhlov,
 - ich plošnými obsahmi.

c) Kružnica a kruh

- Kružnica je jednoznačne určená stredom a polomerom, resp. tromi svojimi bodmi,

- žiadne tri body kružnice neležia na priamke,
- kolmosť dotyčnice k príslušnému polomeru kružnice,
- Talesova veta, **vzt'ah medzi stredovým uhlom a obvodovými uhlami príslušnými k danej tetive**,
- závislosť vzájomnej polohy kružnice a priamky na polomere kružnice a vzdialenosti jej stredu od priamky,
- dotykový bod dvoch kružníc leží na spojnici stredov kružníc, závislosť vzájomnej polohy dvoch kružníc od vzdialenosti stredov kružníc a ich polomerov,
- vzt'ahy pre výpočet obvodu a obsahu kruhu, dĺžku kružnicového oblúka a obsahu kruhového výseku.

d) Štvoruholníky a mnohoúhelníky

- Rovnobežnosť a rovnaká veľkosť protiľahlých strán rovnobežníka,
- rozpoľovanie uhlopriečok v rovnobežníku,
- rovnosť protiľahlých vnútorných uhlov v rovnobežníku,
- súčet susedných uhlov rovnobežníka,
- súčet vnútorných uhlov lichobežníka priľahlých k jeho ramenu,
- uhlopriečky kosoštvorca sú na seba kolmé a rozpoľujú vnútorné uhly,
- zhodnosť uhlopriečok obdĺžnika a štvorca,
- **súčet vnútorných uhlov konvexného n -uholníka**,
- rovnobežník je stredovo súmerný,
- obdĺžnik a štvorec sú súmerné podľa osí strán,
- kosoštvorec je súmerný podľa uhlopriečok,
- rovnoramenný lichobežník je súmerný podľa osi základní,
- pravidelnému n -uholníku sa dá vpísať a opísať kružnica,
- v rovnoramennom lichobežníku sú rovnaké uhlopriečky a rovnaké uhly pri základni,
- obsah rovnobežníka vyjadrený pomocou strany a príslušnej výšky, resp. pomocou susedných strán a uhla medzi nimi,
- obsah lichobežníka vyjadrený pomocou výšky a veľkosti základní.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie

- približne vypočítať obvod a obsah narysovaných trojuholníkov, n -uholníkov, kruhov a ich častí,
- vypočítať v trojuholníku, jednoznačne určenom jeho stranami, resp. stranami a uhlami, zvyšné strany a uhly, dĺžky ťažníc, výšok, **polomer vpísanej a opísanej kružnice**, obvod a obsah (pozri príklady 1, 2, 4, 5),
- rozhodnúť, či sú dva trojuholníky zhodné alebo podobné (pozri príklad 6),
- vlastnosti zhodnosti a podobnosti použiť vo výpočtoch **a dôvodeniach** (pozri príklady 3, 7),
- vypočítať obvod a obsah kruhu a kruhového výseku (pozri príklad 3),
- rozhodnúť o vzájomnej polohe
 - priamky a kružnice,
 - dvoch kružníc, ak pozná ich polomery a vzdialenosť stredov,
- vypočítať plošný obsah rovnobežníka, lichobežníka, resp. rozkladom na trojuholníky aj obsah iných mnohoúhelníkov,
- **vypočítať uhol medzi uhlopriečkami, resp. medzi uhlopriečkou a stranou, v pravidelnom mnohoúhelníku.**

Príklady

1. Šnúra na bielizeň, dlhá 3 m, je zavesená medzi bodmi A a B , ktorých vzdialenosť je 2 m a ktoré sú 2 m vysoko od zeme. Vo vzdialenostiach po jednom metri sú na šnúre pevne prichytené dve závažia. O koľko cm klesne jedno závažie, ak odstránime druhé závažie?
2. Postačí pravouhlý trojuholník, s odvesnami s dĺžkou 7 cm a 8 cm, na prikrytie mince s priemerom 4 cm ?

3. Dve kolesá sú spojené prevodovou reťazou. Polomery kolies sú 10 cm a 5 cm, vzdialenosť stredov je 60 cm. Vypočítajte dĺžku reťaze. Hrúbku reťaze zanedbajte.
4. Dĺžky strán konvexného štvoruholníka sú $|KL| = 20$ cm, $|LM| = 21$ cm, $|MN| = 22$ cm, $|NK| = 23$ cm a uhlopriečka LN má dĺžku 25 cm. Vypočítajte dĺžku druhej uhlopriečky.
5. Dĺžky strán konvexného štvoruholníka sú $|AB| = 3$ cm, $|BC| = 5$ cm, $|CD| = 4$ cm a $|DA| = 6$ cm, uhlopriečka AC je osou uhla pri vrchole A . Vypočítajte jeho plošný obsah.
6. Pre ktoré x, y sú trojuholníky so stranami 3, x , 5 a y , 6, 15 podobné?
7. Peter si kreslí len štvoruholníky, ktoré majú dve protíľahlé strany rovnobežné a súčasne druhé dve protíľahlé strany rovnako dlhé. Adam si kreslí len štvoruholníky, ktorým sa dá opísať kružnica a ktoré majú súčasne rovnaké uhlopriečky. Zistite, či platí, že
 - a) každý Adamov štvoruholník je aj Petrov,
 - b) každý Petrov štvoruholník je aj Adamov.

GEOMETRICKÉ ÚTVARY V ROVINE

1. Do pravouhlého trojuholníka, ktorý má obvod 36 cm, je vpísaná kružnica. Bod dotyku delí jednu z odvesien v pomere 2 : 3. Určte dĺžky strán trojuholníka.
2. Vyšetrite množinu všetkých bodov X roviny, pre ktoré platí $|X, p| \geq 3|X, q|$, ak p, q sú navzájom kolmé priamky.
3. Daná je úsečka AB , $|AB| = 7$ cm. Bod C ju delí v pomere 3 : 2. Nájdite v rovine bod X tak, aby platilo: $|\angle AXC| = 60^\circ$ a $|\angle CXB| = 45^\circ$.
4. Vypočítajte uhol uhlopriečok AF a GD v pravidelnom 8-uholníku.
5. Dve ťažnice trojuholníka sú na seba kolmé a majú dĺžky 27 m a 36 m. Vypočítajte dĺžku tretej ťažnice a obvod daného trojuholníka.
6. Daný je pravouhlý lichobežník $KLMN$, v ktorom strana KN o veľkosti 12 cm je kolmá na základne. Určte obvod a obsah $\triangle LMM^*$, ak M^* je kolmý priemet bodu M na základňu KL ak $|KL| = 17$ cm a obsah $KLMN$ je 174 cm^2 .
7. Daný je obdĺžnik $KLMN$ o rozmeroch 5 x 3 cm. Určte množinu všetkých bodov X roviny KLM , pre ktoré platí: $|\angle KXM| = |\angle LXM| = 60^\circ$.
8. Riešte $\triangle RST$, ak $r = 5j$, $s = 7j$, $t = 10j$.
9. Body K, L, M a N sú obrazmi čísel 4, 9, 7 a 12 na číselníku hodín. Dokážte, že úsečky KL a MN sú na seba kolmé.