

3.2 Analytická geometria v rovine

Obsah

Pojmy: (karteziánska) súradnicová sústava na priamke (číselná os) a v rovine, súradnice bodu, všeobecná rovnica priamky, smernica priamky, smernicový tvar rovnice priamky, rovnica kružnice; **vektor**, **umiestnenie vektora**, **súradnice vektora**, **vektor opačný k danému vektoru**, **nulový vektor**, **súčet a rozdiel dvoch vektorov**, **násobok vektora číslom**, **dĺžka vektora**, **skalárny súčin vektorov**, **parametrické rovnice priamky**, **smerový a normálový vektor priamky**.

Vlastnosti a vzťahy:

- vyjadrenie vzdialenosti dvoch bodov pomocou ich súradníc,
- vzťah medzi smernicami dvoch rovnobežných, resp. kolmých priamok,
- vzťah medzi koeficientmi všeobecných rovníc dvoch rovnobežných, resp. kolmých priamok,
- aspoň jeden vzťah alebo postup pre výpočet
 - uhla dvoch priamok (napr. pomocou skalárneho súčinu, kosínusovej vety alebo smerníc),
 - vzdialenosti bodu od priamky,
- **geometrická interpretácia súčtu dvoch vektorov a násobku vektora reálnym číslom a ich vyjadrenie pomocou súradníc daných vektorov**,
- **body A, B a C ležia na jednej priamke, ak jeden z vektorov $B - A$ a $C - A$ je násobkom druhého**
- **vzťah medzi smerovými vektormi dvoch rovnobežných priamok**,
- **vzdialenosť dvoch bodov ako dĺžka vektora**,
- **kolmosť dvoch priamok a jej vzťah so skalárnym súčinom ich smerových vektorov**,
- **vyjadrenie skalárneho súčinu vektorov pomocou dĺžok vektorov a kosínusu ich uhla (resp. vyjadrenie kosínusu uhla dvoch vektorov pomocou ich skalárneho súčinu a ich dĺžok)**, vyjadrenie skalárneho súčinu vektorov pomocou ich súradníc,
- **vzťah medzi koeficientmi všeobecnej rovnice priamky a normálovým vektorom priamky**.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie

- zostrojiť (v danej súradnicovej sústave) obrazy bodov, ak pozná ich súradnice, a určiť súradnice daných bodov,
- vypočítať súradnice stredu úsečky, **resp. bodu, ktorý úsečku rozdeľuje v danom pomere**,
- napísať analytické vyjadrenie priamky (pozri tiež 3.3 **Množiny bodov daných vlastností a ich analytické vyjadrenie** a 3.4 **Zhodné a podobné zobrazenia**)
 - prechádzajúcej dvoma danými bodmi,
 - daným bodom rovnobežne s danou priamkou,
 - prechádzajúcej daným bodom kolmo na danú priamku,
- určiť vzájomnú polohu dvoch priamok (ak sú dané ich rovnice) a nájsť súradnice ich prípadného priesečníka,
- vypočítať
 - vzdialenosť 2 bodov,
 - vzdialenosť bodu od priamky,
 - vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok,
 - obsah trojuholníka určeného jeho vrcholmi,
 - uhol dvoch priamok,
- napísať rovnicu kružnice (pozri tiež 3.3 **Množiny bodov daných vlastností a ich analytické vyjadrenie** a 3.4 **Zhodné a podobné zobrazenia**)
 - ak pozná jej stred a polomer,
 - v tvare $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$, ak pozná tri body, ktorými kružnica prechádza,
- určiť z rovnice kružnice jej stred a polomer,

- **opísať** v súradnicovej sústave pomocou rovníc a nerovníc úsečku, kružnicu a jej časti, polrovinu a kruh,
- rozhodnúť o vzájomnej polohe
 - priamky a kružnice,
 - dvoch kružníc,
 ak pozná ich rovnice,
- **napísať** rovnicu dotýčníc kružnice z daného bodu, resp. rovnobežných s daným smerom,
- **pri riešení planimetrických úloh používať analytickú metódu, t.j. vie**
 - vhodne si zvolíť súradnicovú sústavu a algebraicky spracovať zadanie,
 - pomocou vedomostí z algebry a poznatkov o vektoroch algebraicky vyriešiť úlohu,
 - algebraický výsledok "preložiť" do geometrického kontextu úlohy (pozri príklad 1).

Príklady

1. V rovine s danými bodmi A, B mal žiak určiť priamku p daných vlastností. Žiak si zvolil súradnicový systém tak, že $A[0, 0]$, $B[1, 0]$. Riešením mu vyšla priamka s rovnicou $x = 0,75$. Opíšte výslednú priamku pomocou bodov A, B . (Riešením je priamka p kolmá na úsečku AB a prechádzajúca bodom C úsečky, pre ktorý platí $|AC| = 3|CB|$.)
2. Ukážte, že ak bod $[x, y]$ leží na grafe paraboly $y = 2px$, tak jeho vzdialenosť od priamky $y = -\frac{p}{2}$ sa rovná jeho vzdialenosti od bodu $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

ANALYTICKÁ GEOMETRIA PRIAMKY V ROVINE A V PRIESTORE

1. Dané sú body $A[3; -4]$, $B[2; 1]$. Napíšte
 - a) parametrické vyjadrenie priamky
 - b) všeobecnú rovnicu priamky AB
 - c) smernicový tvar rovnice priamky AB
 - d) úsekový tvar rovnice priamky AB
2. Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $P[3; -\sqrt{3}]$ a zvierá s osou x uhol 120° .
3. Napíšte všeobecnú rovnicu priamky prechádzajúcej bodmi $A[3; 1]$, $B[-1; 4]$ a vypočítajte dĺžku úsečky AB .
4. Určte vzájomnú polohu priamok p, q ak:

$$p: 3x - 2y + 12 = 0; q: x = -3 + 5t, y = -1 + 2t; t \in \mathbb{R}.$$
 Aké úseky vytína priamku q na súradnicových osiach x, y ?
5. Rozhodnite o vzájomnej polohe priamok p, q ktorých parametrické vyjadrenie je:

$$p: x = 3 - t; y = -2 + 2t; z = 3t; t \in \mathbb{R}$$

$$q: x = 2 + s; y = 1 - s; z = 9 + 3s; s \in \mathbb{R}$$
6. Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, ktorej smernice $k = \frac{1}{3}$ a prechádza priesečníkom priamok

$$p: x - 2y + 8 = 0 \quad q: 3x + 5y + 2 = 0.$$
 Aký je uhol priamok p, q ?

PARABOLA

1. Daný je bod $F[5; 2]$ a priamka $d: x - 3 = 0$. Odvodte analytické vyjadrenie množiny všetkých bodov v rovine, ktoré majú od bodu F a priamky d rovnakú vzdialenosť.
2. Určte smernicu k priamky $p: y = kx + 3/2$ tak, aby bola dotýčnicou paraboly $y^2 = 6x$.

- Napište rovnicu paraboly, ktorá prechádza bodom $A[-5;4]$, ak jej dotyčnica vo vrchole má rovnicu $y - 3 = 0$ a jej os má rovnicu $x + 7 = 0$.
- Napište rovnice všetkých dotyčníc paraboly $P: y^2 - 6x - 6y + 3 = 0$, ktoré sú kolmé na priamku $q: x + 3y + 2 = 0$.

HYPERBOLA

- Napište rovnicu hyperboly, ak sú dané obidve jej *asymptoty* $a_1: y = 2x - 6$, $a_2: y = -2x + 10$, hlavná os je *rovnobežná* s osou x a $a = 2$.
- Napište rovnice všetkých dotyčníc hyperboly $H: 4x^2 - y^2 = 36$, ktoré sú *rovnobežné* s priamkou $p: 5x - 2y + 7 = 0$.
- Napište rovnicu hyperboly, ktorá má ohniská $F_1[-10;2]$, $F_2[16;2]$ a veľkosť *hlavnej osi* je 24.
- Zakreslite množinu bodov danej rovnicou: $x^2 - 5y^2 + 6x - 10y + 40 = 0$.

KRUŽNICA

- Úsečka EF , $E[-3; 1]$, $F[0; -4]$ je priemerom kružnice. Určte rovnicu kružnice a priesečníky kružnice so súradnicovými osami.
- Určte stred a polomer kružnice $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 29 = 0$.
- Napište rovnicu kružnice, ak je daný jej stred $S[1; 2]$ a rovnica priamky $8x + 15y + 13 = 0$, ktorej sa kružnica dotýka.
- Akú dlhú tetivu vytína priamka $2x - y - 6 = 0$ na kružnici $x^2 + y^2 - 4x - 5y - 1 = 0$?
- Určte stred a polomer kružnice $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 14 = 0$ a napíšte rovnicu dotyčnice danej kružnice v jej bode $T[x_0; -3]$.
- Napište rovnicu guľovej plochy, ktorá má stred $S[4; 3; -1]$ a dotýka sa roviny $2x + 6y + 3z + 5 = 0$. Zistite, či bod $A[0; 2; 1]$ je bodom guľovej plochy. Má guľová plocha priesečníky s osou x ?

ELIPSA

- Je daná elipsa $5x^2 + 9y^2 = 45$ a bod $M[0; -3]$.
a) Dokážte, že M je bodom vonkajšej oblasti elipsy.
b) Napište rovnice dotyčníc elipsy prechádzajúcich bodom M a určte ich uhol.
- Elipsa je daná rovnicou $\frac{(x+2)^2}{100} + \frac{(y-1)^2}{36} = 1$. Určte dĺžku tetivy, ktorá prechádza jej „pravým“ ohniskom a je kolmá na jej hlavnú os.
- Určte rovnice dotyčníc elipsy $9x^2 + 16y^2 = 144$, ktorých smernica sa rovná 1.
- Zistite, či daná rovnica je rovnicou elipsy. Ak áno, určte všetky jej charakteristické vlastnosti.
a) $25x^2 + 9y^2 - 100x - 54y - 44 = 0$ b) $9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0$

SKALÁRNY A VEKTOROVÝ SÚČIN VEKTOROV

- Na ciferníku hodín je bod A obrazom čísla 1, bod B obrazom čísla 6, bod C obrazom čísla 3 a bod D obrazom čísla 10. Dokážte (metódou analytickej geometrie), že priamky AB a CD sú navzájom kolmé.
- Je daný pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$, v ktorom veľkosť podstavnej hrany $a = 6$ j a jeho výška $v = 3\sqrt{2}$ j. Zvoľte vhodne sústavu súradníc v priestore a určte:
a) veľkosť bočnej hrany b) dokážte, že $\vec{AV} \perp \vec{CV}$ c) veľkosť uhla vektorov $\vec{u} = \vec{AV}; \vec{v} = \vec{BC}$

3. Dané sú body $A[1;1;1]$, $B[1;1;2]$, $C[3;1;2]$.
 - a) Dokážte, že body A , B , C neležia na jednej priamke (identitou k priamke a teóriou vektorov)
 - b) Určte veľkosti vnútorných uhlov $\triangle ABC$ a vypočítajte obsah rovnobežníka $ABCD$.
4. Dané sú body $A[2;1;0]$, $B[3;3;1]$, $D[4;2;1]$, $E[-1;1;0]$. Vypočítajte:
 - a) objem rovnobežnostena $ABCDEFGH$
 - b) povrch rovnobežnostena $ABCDEFGH$
5. Kosoštvorec $KLMN$ má vrcholy $K[-4; 0]$, $L[6; 0]$, $N[2; n_2]$. Určte súradnice zvyšných vrcholov.
6. Vypočítajte obvod trojuholníka KLM s ťažiskom $T[5; 5]$, ak $K[2; 4]$, $L[8; -3]$

ANALYTICKÁ GEOMETRIA ROVINY

1. Napíšte parametrické vyjadrenie roviny prechádzajúcej bodmi $M[4;1;-5]$, $N[5;-3;7]$, $P[6;4;-8]$, zistite, či v nej leží bod $K[3;5;9]$ a potom určte všeobecnú rovnicu roviny.
2. Napíšte rovnicu polroviny $\overrightarrow{ABC}$, ak $A[3;2]$, $B[6;1]$, $C[-3;-2]$.
Určte obvod, obsah a veľkosti ťažníc trojuholníka ABC .
3. Napíšte všeobecnú rovnicu roviny prechádzajúcu bodmi $A[2;0;-3]$, $B[3;1;2]$, $C[7;0;5]$ a zistite, či v nej leží bod $X[3;5;9]$.
4. Zistite, ktoré z bodov $C[1;0;-5]$, $D[3;2;1]$, $E[4;-5;1]$ ležia v tom istom polpriestore s hraničnou rovinou $r : x = t - s \wedge y = 5 + s \wedge z = 3t$, $[t; s] \in \mathbb{R}^2$.
5. Určte uhol rovín r, t prechádzajúcich bodom $Q[3; -2; 5]$, ak jedna z nich obsahuje os y a druhá os z .

PRIAMKY a KRIVKY DRUHÉHO STUPŇA

1. Nájdite rovnice dotyčníc elipsy $9x^2 + 16y^2 = 144$, ktoré majú smernicu $k = 1$.
2. Elipsa je daná rovnicou $4x^2 + 16y^2 = 64$. Vypočítajte dĺžku tetivy, ktorú elipsa vytína na priamke $p: \sqrt{3}x - 2y = 0$.
3. Napíšte rovnice dotyčníc kružnice $k: x^2 + y^2 = 5$, ak bodmi dotyku sú priesečníky kružnice s priamkou $q: x - 3y + 5 = 0$. Určte uhol týchto dotyčníc.
4. Na parabole $P: y^2 - 10x - 2y - 9 = 0$ nájdite bod, ktorý má najmenšiu vzdialenosť od priamky $p: x - 3y + 18 = 0$.
5. Parabola $y^2 = 2px$ má dotyčnicu $3x - 4y + 6 = 0$. Vypočítajte parameter p a súradnice dotykového bodu.
6. Daná je elipsa $E: x^2 + 4y^2 - 16 = 0$. Určte hodnoty reálneho parametra c tak, aby priamka $q: 2x - 3y + c = 0$ bola
 - a) sečnicou
 - b) dotyčnicou
 - c) nemala s E spoločný bod.