

5.1 Kombinatorika a pravdepodobnosť

Obsah

Pojmy: (kombinatorické) pravidlo súčtu, (kombinatorické) pravidlo súčinu, permutácie, variácie a variácie s opakovaním, kombinácie, faktoriál, kombinačné číslo, Pascalov trojuholník, **binomická veta**, pravdepodobnosť, doplnková pravdepodobnosť, „**geometrická**“ **pravdepodobnosť**, náhodný jav, nezávislé javy.

Vlastnosti a vzťahy:

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, $0! = 1$,
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $C_k(n) = \binom{n}{k}$, $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$, $P_n = n!$,
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$,
- **binomická veta**,
- pre pravdepodobnosť P udalosti A platí $0 \leq P(A) \leq 1$,
- $P(A) + P(A') = 1$, kde A' je doplnková udalosť k udalosti A ,
- pravdepodobnosť istej udalosti je 1,
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, ak A, B sú nezávislé javy.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie

- riešiť jednoduché kombinatorické úlohy
- vypisovaním všetkých možností, pričom
- vie vytvoriť systém (strom logických možností) na vypisovanie všetkých možností (ak sa v tomto strome vyskytujú niektoré možnosti viackrát, vie určiť násobnosť ich výskytu),
- dokáže objaviť podstatu daného systému a pokračovať vo vypisovaní všetkých možností,
- na základe vytvoreného systému vypisovania všetkých možností určiť (pri väčšom počte možnosti algebraickým spracovaním) počet všetkých možností,
- použitím kombinatorického pravidla súčtu a súčinu,
- využitím vzorcov pre počet kombinácií, variácií, variácií s opakovaním a permutácií,
- **použitím rekurentného prístupu** (pozri príklad 1),
- použiť pri úprave výrazov rovnosti uvedené v časti Vlastnosti a vzťahy (pozri 1.4 Čísla, premenné, výrazy),
- **pre konkrétne n a k nájsť koeficient pri mocnine $a^k b^{n-k}$ v mnohočlene $(a+b)^n$** ,
- rozhodnúť
- o závislosti javov A, B , ak pozná $P(A)$, $P(B)$ a $P(A \cap B)$,
- v jednoduchých prípadoch o správnosti použitia rovnosti $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$,
- riešiť úlohy na pravdepodobnosť, založené na
- hľadaní pomeru všetkých priaznivých a všetkých možností, resp. všetkých nepriaznivých a všetkých priaznivých možností, ak vie tieto počty určiť riešením jednoduchých kombinatorických úloh,
- doplnkovej pravdepodobnosti,
- **využití „geometrickej“ pravdepodobnosti** (pozri príklady 2, 3).

Príklady

1. Nech a_n je počet všetkých možností, ako je možné zjesť n jabĺčok tak, že každý deň zjem jedno alebo dve jabĺčka. Vyjadrite a_n pomocou a_{n-1} a a_{n-2} (Ukážte, že $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$).

2. Aká je pravdepodobnosť, že bod náhodne zvolený vnútri rovnostranného trojuholníka leží vnútri kružnice, ktorá je tomuto trojuholníku vpísaná?
3. Na úsečke si náhodne zvolím bod. Aká je pravdepodobnosť, že tento bod rozdelí úsečku na dve úsečky, z ktorých jedna je aspoň 7-krát väčšia ako druhá?

KOMBINATORIKA – KOMBINAČNÉ ČÍSLA

1. Riešte v $\mathbb{N}$:
$$\binom{6}{5} \binom{y+1}{y-1} - \binom{6}{4} \binom{y+2}{y+1} = \binom{4}{2}$$
2. V binomickom rozvoji výrazu $\left(\frac{x}{4} - \frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)^{15}$ určte a) 13-ty člen rozvoja b) absolútny člen
3. V rovine je daných 12 rôznych priamok, z ktorých práve 4 prechádzajú jediným bodom, žiadna ďalšia trojica nemá spoločný bod a žiadne dve priamky nie sú rovnobežné. V koľkých bodoch sa tieto priamky pretínajú?
4. Ak sa zväčší počet prvkov o 1, zvýši sa počet kombinácií 3. triedy o 21. Určte pôvodný počet prvkov.

KOMBINATORIKA – VARIÁCIE, PERMUTÁCIE

1. Koľko prirodzených čísel deliteľných piatimi možno zostrojiť z čísel 0, 1, 2, 5, 7, 8, 9 ak majú byť:
 - a) štvorciferné a číslice sa nesmú opakovať
 - b) päťciferné a číslice sa môžu opakovať.
2. Koľkými spôsobmi sa môže 8 chlapcov a 4 dievčatá rozdeliť na dve šesťčlenné volejbalové družstvá, ak má byť v každom družstve aspoň jedno dievča?
3. Koľko rôznych priamok možno viesť 9 bodmi, ak
 - a) žiadne tri neležia na jednej priamke
 - b) 5 bodov leží na jednej priamke
 - c) 4 body ležia na jednej priamke, ďalšie 4 ležia na druhej priamke a jeden bod je voľný?
4. Do skupiny ABBA boli prijatí dvaja noví členovia A a B. Akú majú možnosť vytvoriť nový názov skupiny, ak musia použiť všetkých 6 písmen?
5. 53 štátov UNESCO sa dohodlo, že každý každému zašle správu o stave školstva vo svojom štáte. 15 krajín UPIRU sa neskôr rozhodlo svoje správy nezaslať. Koľko správ bolo rozoslaných?
6. Vo vrecku je 15 rovnakých guľôčok označených číslami 1 až 15. Koľkými spôsobmi môžeme postupne s prihliadnutím na poradie vybrať 3 z nich, ak sa do vrecka vytiahnuté guľôčky
 - a) nevracajú
 - b) vracajú?

PRAVDEPODOBNOSŤ

1. Hráči A, B, C hádžu mincou v abecednom poradí. Vyhráva ten, komu padne prvému rub. Ak nepadne rub nikomu v prvom hode, pokračuje sa druhými hodmi atď. Hra sa končí vo chvíli, keď padne prvý rub. Určte pravdepodobnosť výhry hráča A.
2. V bufete majú 10 druhov žuvačiek. Prvé dva sú po 2,- Sk, ďalších 5 druhov je po 3,- Sk a zvyšné 3 druhy sú po 5,- Sk. Vyberieme si náhodne 3 rôzne žuvačky. Aká je pravdepodobnosť, že:
 - a) aspoň 2 zo žuvačiek majú rôznu cenu
 - b) zaplatíme aspoň 12,- Sk?
3. V debne je 10 súčiastok, z ktorých sú 3 chybné. Aká je pravdepodobnosť, že medzi piatimi náhodne vybranými súčiastkami budú najviac 2 chybné?
4. Futbalista premení pokutový kop s pravdepodobnosťou $p = 0,8$. Vypočítajte pravdepodobnosť udalosti, že z 10 pokutových kopov premení aspoň 8.

5. V autobazáre majú k dispozícii 20 automobilov značky ŠKODA a 30 značky LADA. Pravdepodobnosť poruchy ŠKODY je 0,04 a LADY 0,05. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraný automobil bude mať poruchu ?
6. Traja slobodní muži, 5 slobodných žien a jeden manželský pár boli konkurzom vybraní na tri voľné pracovné miesta v určitom podniku. Uchádzači sú považovaní za rovnocenných, preto sa ich výber uskutoční losovaním. Aká je pravdepodobnosť, že medzi vylosovanými bude aspoň jeden z manželov ?
7. Aká je pravdepodobnosť, že pri hode dvoma hracími kockami padne:
- a) na oboch rôzne číslo
 - b) párny súčet ?